# *ANSCHLUSSDOKUMENT*
*zur VPAM-APR*

## *"Ballistischer Grenzwert $v_{50}$ - Methode nach VPAM-KNB"*

# *AND-BaG*

*Stand: 15.03.2021*

***Herausgeber:***

*Vereinigung der Prüfstellen für angriffshemmende Materialien und Konstruktionen (VPAM)*

## *Erstausgabe des VPAM AND-BaG: 15.03.2021*

## *Standänderungsnachweis*

*(die alten Stände können auf der Homepage www.vpam.eu im Richtlinienarchiv eingesehen werden)*

| ***Änderung*** | | ***Änderungen erfolgten unter folgenden Ziffern*** |
|---|---|---|
| ***Nr.*** | ***Datum*** | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

# Einleitung

In diesem Anschlussdokument wird der ballistische Grenzwert $v_{50}$ sowie dessen Bestimmung nach der Methode VPAM-KNB beschrieben. Dieses Anschlussdokument ist Teil der Richtlinie VPAM-APR in der jeweils gültigen Fassung im Letztstand.

Die Grundlagen für Prüfungen und/oder Konformitätsbewertungen von Materialien, Konstruktionen und Produkten, die Schutz gegen Angriffe mit Waffen bieten sind in den „Allgemeine Prüfgrundlagen für angriffshemmende Material-, Konstruktions- und Produktprüfungen“, VPAM-APR, beschrieben.

# Inhaltsverzeichnis

***Einleitung*** ..... **2**

***Inhaltsverzeichnis*** ..... **3**

***1. Ermittlung des ballistischen Grenzwertes $v50$*** ..... **3**

*1.1 Prüfverfahren* ..... 4
*1.2 Methode nach VPAM-KNB* ..... 4

***2. Statistische Risikobestimmung*** ..... **6**

*2.1 Bestimmung anderer Sicherheitsschwellen als 50%* ..... 7
*2.2 Bestimmung der Grenzgeschwindigkeit $vp$ für eine gegebene Durchschusswahrscheinlichkeit $p$* ..... 7
*2.3 Bestimmung der Durchschusswahrscheinlichkeit $pv$ für eine gegebene Prüfgeschwindigkeit $vp$* ..... 7

***3. Anlagen*** ..... **9**

*Anlage 1: Formular zur Ermittlung der $v50$ und der Standard- abweichung $skorr$* ..... 9
*Anlage 2: Koeffizienten/Quantile für die Berechnung der Sicherheitsschwelle bzw. Grenzgeschwindigkeit bei gegebener Durchschusswahrscheinlichkeit $p$* ..... 10
*Anlage 3: Koeffizienten für die Berechnung der Durchschusswahr-scheinlichkeit $pv$ bei gegebener Prüfgeschwindigkeit $vp$* ..... 12
*Anlage 4: Beispielrechnungen* ..... 13
*Anlage 5: Erstellung eines Verteilungsfunktionsdiagramms ($pv$ bzw. $Fk$ über $v$)* ..... 16

# 1. Ermittlung des ballistischen Grenzwertes $v_{50}$

Der ballistische Grenzwert $v_{50}$ ist jene Geschwindigkeit, bei welcher die Durchschusswahrscheinlichkeit bei einem ballistischen Angriff 50% beträgt. Unter bestimmten Rahmenbedingungen ist in Kombination mit der Standardabweichung $s$ sowie unter der Annahme, dass die Durchschusswahrscheinlichkeit eine normalverteilte Funktion der Prüfgeschwindigkeit ist, die Durchschusswahrscheinlichkeit zu jeder Geschwindigkeit oder die Grenzgeschwindigkeit für eine gegebene Durchschusswahrscheinlichkeit zu ermitteln.

## 1.1 Prüfverfahren

Die Geschossgeschwindigkeit ist als Prüfgeschwindigkeit nach VPAM-APR zu ermitteln.
Die Angriffspunkte sind auf dem Prüfmuster so zu wählen, dass durch vorhergehende Schüsse keine Vorschädigungen im Bereich des Angriffspunktes vorhanden sind, die das Ergebnis beeinflussen. Auf Basis der produktspezifischen Richtlinien oder der im Vorfeld der Prüfung vom Auftraggeber definierten Trefferanordnung im Hinblick auf die Vorschädigung sind die Treffer auszuführen. Wird seitens der Prüfstelle darüber hinaus eine einflussnehmende Vorschädigung durch die Trefferbelastung erwartet, ist die Prüfung unter Verwendung weiterer Prüfmuster fortzuführen.
Die Prüfungen sind mit einem Auftreffwinkel von 90° (0° NATO) sowie der Prüfanordnung nach VPAM-APR durchzuführen.
Soweit Plastilin als Hintergrundmaterial verwendet wird, ist nach jedem Schuss das Plastilin zu glätten und mit einer Klinge abzuziehen sowie das aufgespannte Prüfmuster zu glätten.
Die Vorgaben für die zu verwendenden Geschosse, Schussentfernung und Dralllängen nach VPAM-APR sind einzuhalten.
Für die Grenzwertermittlung können alle einer Prüfstufe zugeordneten Prüfläufe inkl. Patronenlager eingesetzt werden. Die Wahl des Prüflaufs orientiert sich dabei an den zu erreichenden Geschwindigkeiten. Dabei ist sicherzustellen, dass es auf Grund höherer Prüfgeschwindigkeiten zu keinen innerballistischen Geschossverformung auf Grund der Verwendung ungeeignetem Treibladungspulvers kommt.
Die Bewertung eines Durchschusses richtet sich nach der jeweiligen produktspezifischen Richtlinie.

## 1.2 Methode nach VPAM-KNB

Die Methode VPAM-KNB hat den Vorteil, dass jeder Prüfbeschuss unabhängig vom geschossenen Geschwindigkeitsbereich ausgewertet werden kann und dass zusätzlich zur $v_{50}$ (Mittelwert) ein Schätzwert für die Standardabweichung $s$ resultiert. Voraussetzung dafür ist die Annahme, dass die Durchschusswahrscheinlichkeit eine normalverteilte Funktion der Prüfgeschwindigkeit ist. ACHTUNG: Das Vorliegen einer Normalverteilung steht in Abhängigkeit des Materialverhaltens und ist nicht für alle Schutzaufbauten gewährleistet. Neben dem $v_{50}$-Wert können dadurch auch andere Sicherheitsschwellenwerte (z.B. $v_{95}$) angegeben werden. Darüber hinaus kann zu jeder vorgegebenen Prüfgeschwindigkeit die Durchschusswahrscheinlichkeit und zu

jeder gegebenen Durchschusswahrscheinlichkeit die zugehörige Prüfgeschwindigkeit bestimmt werden.

Da Stichproben stets nur eine endliche Zahl von Ereignissen enthalten, muss die Wahrscheinlichkeitsfunktion durch die relative Häufigkeit ersetzt werden. Relative Häufigkeiten von stetigen Zufallsvariablen lassen sich jedoch nur schätzen, wenn eine Klasseneinteilung der Geschwindigkeiten in bestimmte Klassenbreiten (z.B. 5m/s oder 10m/s) vorgenommen wird. Mit der Änderung der relativen Klassenhäufigkeit $f_k$ und der Klassenmitte $v_k^*$ einer bestimmten Klasse $k$ ergibt sich:

$$v_{50} = \sum v_k \cdot f_k \qquad \text{Mittelwert } v_{50}$$

$$s^2 = \sum (v_k - v_{50})^2 \cdot f_k \qquad \text{Standardabweichung}$$

$$f_k = \Delta F_k = F_{k+1} - F_k \qquad \text{Änderung der relativen Klassenhäufigkeit}$$

$$v_k = \frac{1}{2} \cdot (v_{k+1}^* + v_k^*) \qquad \text{zugehörige Klassengeschwindigkeit}$$

Bei der praktischen Durchführung einer Prüfung ergeben sich innerhalb der Klassen drei Teilbereiche (mit $F_k$ wird die relative Durchschusshäufigkeit bezeichnet):

- Teilbereich 1: nur gestoppte Schüsse ($F_k = 0$)
- Teilbereich 2: sowohl Durchschüsse als auch gestoppte Schüsse ($0 \leq F_k \leq 1$)
- Teilbereich 3: nur Durchschüsse ($F_k = 1$).

Um eine möglichst aussagekräftige Auswertung zu erhalten, sollten folgende Bedingungen eingehalten werden:

- Die minimale Anzahl Schüsse muss mindestens 12, idealerweise mindestens 20 betragen.
- Jeder der drei Teilbereiche muss mindestens 2 Schüsse enthalten.
  *Dies bedeutet, dass der Schuss mit der kleinsten Geschwindigkeit kein Durchschuss sein darf und der Schuss mit der höchsten Geschwindigkeit ein Durchschuss sein muss. Diese Bedingung hängt mit der Grundform der Durchschusswahrscheinlichkeitsfunktion (Summenkurve der Normalverteilung) zusammen, die für kleine Werte gegen 0 und für große Werte gegen 1 strebt.*

*Ist der mittlere Abschnitt leer, so ist keine Bestimmung der Streuung möglich, da in diesem Fall $s = 0$ wird.*

- Zwischen zwei der drei benachbarten Teilbereiche darf nicht mehr als eine leere Geschwindigkeitsklasse sein.
  *Dies bedeutet, dass die Klassenbreite nicht zu klein gewählt werden sollte, da sonst die Anzahl der abzugebenden Schüsse steigt. Darüber hinaus führt eine kleine Klassenbreite nicht zwingend zu einem exakteren Ergebnis. Vorzugsweise sollten die Klassenbreiten 5m/s bzw. 10m/s verwendet werden.*

Weil sich bei kleinen Schusszahlen (< 100) nach den obigen Formeln systematisch eine zu kleine Standardabweichung ergibt, ist eine von der Schusszahl $n$ abhängige, empirisch ermittelte Korrektur erforderlich:

$$s_{korr} = s \cdot [1.71 - 0.151 \cdot ln(n)]$$

wobei $ln(n)$ den natürlichen Logarithmus der Schusszahl $n$ darstellt. Ein Formular zur Ermittlung der $v_{50}$ und der Standardabweichung $s_{korr}$ findet sich in der Anlage 1. Die Ergebnisse (Durchschuss „DS“ oder Kein-Durchschuss „KD“) sind in den entsprechenden Kolonnen in der jeweiligen Geschwindigkeitsklasse zu summieren. Die Auswertung erfolgt nach den oben genannten Formeln.

# 2. Statistische Risikobestimmung

Ist für einen ballistischen Schutz die gemittelte Durchschussgeschwindigkeit ($v_{50}$) und die zugehörige Standardabweichung $s$ (respektive $s_{korr}$) nach Abschnitt 1 bestimmt, so können mit Hilfe statistischer Verfahren Risikobestimmungen durchgeführt werden.

*Bei einer allfälligen Auswertung ist zu beachten, dass die Normalverteilung innerhalb als auch außerhalb des geprüften Bereichs vorliegen muss! Es werden Aussagen/Schätzungen zu NICHT GEPRÜFTEN Szenarien getroffen! Mit der Ausgabe der in diesem Anschlussdokument angeführten Berechnung ergibt sich somit keinesfalls immer eine belastbare Aussage. Der ballistische Grenzwert $v_{50}$ sowie die korrigierte Standardabweichung $s_{korr}$ kann zur **Qualitätssicherung** herangezogen werden, eignet sich jedoch nur **unzureichend als Ausschreibungskriterium**.*

*Die Bestimmung des Wertes von $v_{50}$ ist sicherlich eine Aufwertung gegenüber dem genormten Widerstandstest vom Typ "n Einschläge zu widerstehen, die durch eine Geschwindigkeit innerhalb eines vorgeschriebenen Bereichs charakterisiert sind".*

*Die Verwendung von $v_{50}$ in Kombination mit der jeweiligen Standardabweichung zur Abschätzung der Geschwindigkeiten von Ereignissen mit sehr geringer (resp. hoher)*

*Wahrscheinlichkeit wie $v_{01}$ ($v_{99}$) kann durch die Art der Wechselwirkung zwischen Projektil und Schutz zu unkontrollierten Abweichungen und somit unzulässigen Aussagen führen.*

## 2.1 Bestimmung anderer Sicherheitsschwellen als 50%

Andere Sicherheitsschwellen als 50% können ebenfalls bestimmt werden. Dies erfolgt dann mit der nachstehenden Beziehung ($k_p$ gemäß *Anlage 2*):

$$v_p = v_{50} + k_p \cdot s_{korr}$$

Ein Beispiel dafür ist in *Anlage 4* angegeben.

## 2.2 Bestimmung der Grenzgeschwindigkeit $v_p$ für eine gegebene Durchschusswahrscheinlichkeit p

Bei vorgegebener Durchschusswahrscheinlichkeit $p$ wird die zugehörige Grenzgeschwindigkeit $v_p$ des ballistischen Schutzes mit der folgenden Beziehung ermittelt. Dies ermöglicht den direkten Vergleich dieser Grenzgeschwindigkeit mit der vom Anwender vorgegebenen maximalen Prüfgeschwindigkeit:

$$v_p = v_{50} \; + \; k_p \cdot s_{korr}$$

Werte für die Zahl $k_p$ sind in Abhängigkeit der Durchschusswahrscheinlichkeit in *Tabelle 3* zusammengestellt. Sie entstammen der standardisierten Normalverteilung. Ein Beispiel dafür ist in *Anlage 4* angegeben.

## 2.3 Bestimmung der Durchschusswahrscheinlichkeit $p_v$ für eine gegebene Prüfgeschwindigkeit $v_p$

Die Bestimmung der Durchschusswahrscheinlichkeit $p_v$ bei vorgegebener maximaler Prüfgeschwindigkeit $v_p$ ermöglicht das Abschätzen des Restrisikos für diesen Prüfgeschwindigkeitsbereich.
Bei bekannter $v_p$ und bekannter Standardabweichung $s_{korr}$ ergibt sich die Durchschusswahrscheinlichkeit bei der Prüfgeschwindigkeit $v_p$ durch Umformung der obigen Gleichung zu:

$$k_p = \frac{v_p - v_{50}}{s_{korr}}$$

Mit $k_p$ errechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p_v$ nach der folgenden Formel:

$$p_v = P(k_p) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{k_p} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx$$

oder mit *Tabelle 2* im *Anlage 3*.
Ein Beispiel dafür ist in *Anlage 4* angegeben.

# 3. Anlagen

## Anlage 1: Formular zur Ermittlung der $v_{50}$ und der Standardabweichung $s_{korr}$

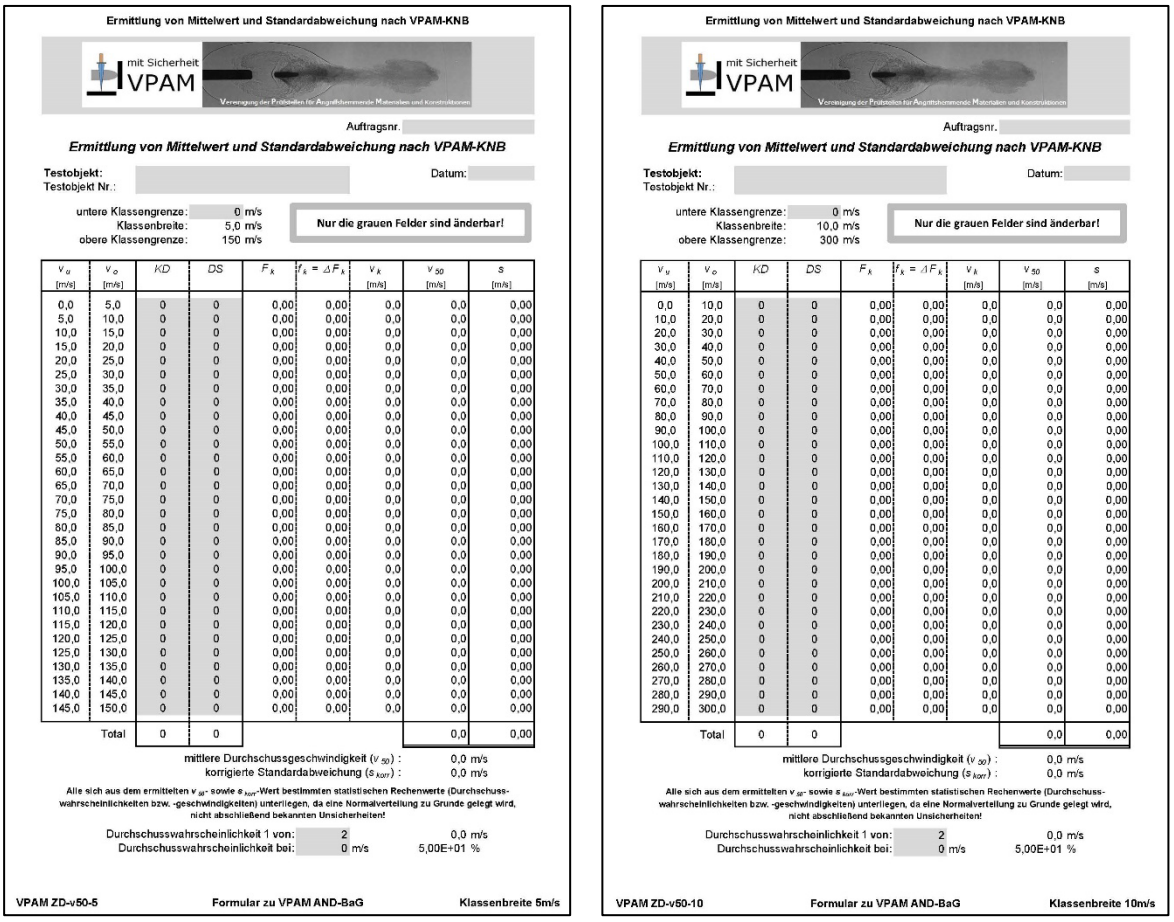


***Abbildung 1**: Die auf der Homepage zur Verfügung gestellten Auswerteformulare «20210101 ZD-v50-5 KNB-Formular_Klassenbreite5mps.xlsx» mit fixer Klassenbreite von 5m/s (links) bzw. «20210101 ZD-v50-10 KNB-Formular_Klassenbreite10mps.xlsx» mit fixer Klassenbreite von 10m/s (rechts) mit teilweise gesperrten Zellen.*

Diese in *Abbildung 1* dargestellten Formulare steht als Zusatzdokumente **VPAM ZD-v50-5** bzw. **VPAM ZD-v50-10** im Format *.xlsx (teilweise gesperrte Zellbereiche) zum Download zur Verfügung. Die fixe Klassenbreite von 5m/s eignet sich gut für Materialien mit kleiner Standardabweichung (z.B. VPAM-PM), jenes mit 10m/s für Materialien mit größerer Standardabweichung (z.B. VPAM-BSW). Obwohl die Auswertung theoretisch unabhängig von der Klassenbreite ist, sollten, um die Vergleichbarkeit bestmöglich sicher zu stellen, nicht von diesen beiden Klassenbreiten abgewichen werden.

# Anlage 2: Koeffizienten/Quantile für die Berechnung der Sicherheitsschwelle bzw. Grenzgeschwindigkeit bei gegebener Durchschusswahrscheinlichkeit $p$

Die in *Tabelle 1* angegebenen Koeffizienten entstammen der standardisierten Normalverteilung.

***Tabelle 1**: Koeffizienten/Quantile $k_p$ bei gegebener Durchschusswahrscheinlichkeit $p$*

| $p$ [%] | $p$ [ ] | $p$ [ ] | Bedeutung | $k_p$ [ ] |
|---|---|---|---|---|
| 0,0001 | $10^{-6}$ | 0,000001 | 1 von 1 000 000 | -4,753 |
| 0,001 | $10^{-5}$ | 0,00001 | 1 von 100 000 | -4,265 |
| 0,01 | $10^{-4}$ | 0,0001 | 1 von 10 000 | -3,719 |
| 0,1 | $10^{-3}$ | 0,001 | 1 von 1 000 | -3,090 |
| 1 | $10^{-2}$ | 0,01 | 1 von 100 | -2.326 |
| 2 | $2 \cdot 10^{-2}$ | 0,02 | 1 von 50 | -2,054 |
| 5 | $5 \cdot 10^{-2}$ | 0,05 | 1 von 20 | -1,645 |
| 10 | $10^{-1}$ | 0,10 | 1 von 10 | -1,282 |
| 25 | $2,5 \cdot 10^{-1}$ | 0,25 | 1 von 4 | -0,674 |
| **50** | $\mathbf{5 \cdot 10^{-1}}$ | **0,50** | **1 von 2** | **0** |
| 75 | $7,5 \cdot 10^{-1}$ | 0,75 | 3 von 4 | 0,674 |
| 90 | $9 \cdot 10^{-1}$ | 0,90 | 9 von 10 | 1,282 |
| 95 | $9,5 \cdot 10^{-1}$ | 0,95 | 95 von 100 | 1,645 |
| 98 | $9,8 \cdot 10^{-1}$ | 0,98 | 98 von 100 | 2,054 |
| 99 | $9,9 \cdot 10^{-1}$ | 0,99 | 99 von 100 | 2,326 |
| 99.5 | $9,95 \cdot 10^{-1}$ | 0,995 | 995 von 1 000 | 2,576 |
| 99.9 | $9,99 \cdot 10^{-1}$ | 0,999 | 999 von 1 000 | 3,090 |
| 99,99 | $9,999 \cdot 10^{-1}$ | 0,9999 | 9 999 von 10 000 | 3,719 |
| 99,999 | $9,9999 \cdot 10^{-1}$ | 0,99999 | 99 999 von 100 000 | 4,265 |
| 99,9999 | $9,99999 \cdot 10^{-1}$ | 0,999999 | 999 999 von 1 000 000 | 4,753 |

Die angegebenen Werte sind nur ein kleiner Teil der in Mathematikbüchern ausführlicher angegebenen ˝Quantile der Normalverteilung˝, welche in *Abbildung 2* dargestellt ist. Sollte beispielsweise $k_p$ für 20% gesucht sein, wird dieser Wert zwischen -1,282 und -0,674 liegen und kann aus diesen Mathematiktabellen[1)] mit $k_p$= -0,8416 ($k_{20}$ = -$k_{80}$) bestimmt werden. Man kann erkennen, dass die $k_p$-Werte

[1)] *siehe z.B. https://www.risk-research.de/fileadmin/user_upload/NV_Quantile.pdf*

um den $v_{50}$-Wert auf Grund der Symmetrie der standardisierten Normalverteilung natürlich auch symmetrisch sind.

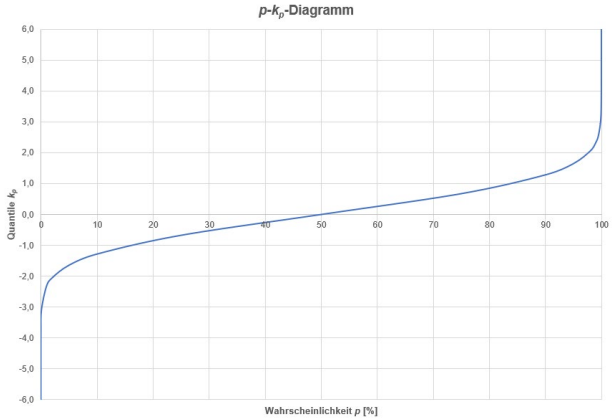


***Abbildung 2**: Diagramm der Quantile der Normalverteilung $k_p$ als Funktion der Wahrscheinlichkeit p [%].*

Aus *Abbildung 2* erkannt man auch, dass eine Interpolation zwischen den in *Tabelle 1* angegebenen Wahrscheinlichkeitswerten, je nach Bereich, eine gute oder weniger gute Näherung ergibt.

# Anlage 3: Koeffizienten für die Berechnung der Durchschusswahrscheinlichkeit $p_v$ bei gegebener Prüfgeschwindigkeit $v_p$

Die in *Tabelle 2* angegebenen Wahrscheinlichkeiten können für eine standardisierte Normalverteilung auch mittels

$$p_v = P(k_p) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{k_p} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx$$

errechnet werden, wobei jeweils gilt:

$$k_p = \frac{v_p - v_{50}}{s_{korr}}$$

***Tabelle 2:*** *Durchschusswahrscheinlichkeit $p_v$ als Funktion von $k_p$*

| | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -5 | 2.87e-07 | 1.70e-07 | 9.98e-08 | 5.80e-08 | 3.34e-08 | 1.90e-08 | 1.07e-08 | 6.01e-09 | 3.33e-09 | 1.82e-09 |
| -4 | 3.17e-05 | 2.07e-05 | 1.34e-05 | 8.55e-06 | 5.42e-06 | 3.40e-06 | 2.11e-06 | 1.30e-06 | 7.94e-07 | 4.80e-07 |
| -3 | 1.35e-03 | 9.68e-04 | 6.87e-04 | 4.83e-04 | 3.37e-04 | 2.33e-04 | 1.59e-04 | 1.08e-04 | 7.24e-05 | 4.81e-05 |
| -2 | 2.28e-02 | 1.79e-02 | 1.39e-02 | 1.07e-02 | 8.20e-03 | 6.21e-03 | 4.66e-03 | 3.47e-03 | 2.56e-03 | 1.87e-03 |
| -1 | 1.59e-01 | 1.36e-01 | 1.15e-01 | 9.68e-02 | 8.08e-02 | 6.68e-02 | 5.48e-02 | 4.46e-02 | 3.59e-02 | 2.87e-02 |
| -0 | 5.00e-01 | 4.60e-01 | 4.21e-01 | 3.82e-01 | 3.45e-01 | 3.09e-01 | 2.74e-01 | 2.42e-01 | 2.12e-01 | 1.84e-01 |
| 0 | 5.00e-01 | 5.40e-01 | 5.79e-01 | 6.18e-01 | 6.55e-01 | 6.91e-01 | 7.26e-01 | 7.58e-01 | 7.88e-01 | 8.16e-01 |
| 1 | 8.41e-01 | 8.64e-01 | 8.85e-01 | 9.03e-01 | 9.19e-01 | 9.33e-01 | 9.45e-01 | 9.55e-01 | 9.64e-01 | 9.71e-01 |
| 2 | 9.77e-01 | 9.82e-01 | 9.86e-01 | 9.89e-01 | 9.92e-01 | 9.94e-01 | 9.95e-01 | 9.97e-01 | 9.97e-01 | 9.98e-01 |
| 3 | 9.99e-01 | 9.99e-01 | 9.99e-01 | 1.00e+00 | 1.00e+00 | 1.00e+00 | 1.00e+00 | 1.00e+00 | 1.00e+00 | 1.00e+00 |

Es gilt zu erwähnen, dass entsprechend der Normalverteilung eine 100%-ige Durchschusswahrscheinlichkeit ebenso wenig erreichbar ist wie eine 0%-ige Durchschusswahrscheinlichkeit, der sich nicht mehr ändernden Wert 9,99e-01 und 1,00e+00 ist der Rundung geschuldet.

## Anlage 4: Beispielrechnungen

*Beispiel 1:*

Berechnung der Sicherheitsschwellen für 25% $v_{25}$ (25% der Schüsse mit dieser Geschwindigkeit ergeben im Mittel einen Durchschuss) bzw. 90% $v_{90}$ (90% der Schüsse mit dieser Geschwindigkeit ergeben im Mittel einen Durchschuss).

geg.: $v_{50}$ = 465 m/s
$s_{korr}$ = 12,5 m/s

ges.: $v_{25}$
$v_{90}$

Die Formel $v_p = v_{50} + k_p \cdot s_{korr}$ liefert als Grenzgeschwindigkeit für die Sicherheitsschwellen für 25%:
(Wert -0,674 aus *Tabelle 1*)

$$v_{25} = 465 - 0{,}674 \cdot 12{,}5 = 456{,}6\ m/s$$

Sicherheitsschwellen für 90%:
(Wert 1,282 aus *Tabelle 1*)

$$v_{90} = 465 + 1{,}282 \cdot 12{,}5 = 481{,}0\ m/s$$

Man kann erkennen, dass Sicherheitsschwellen für 25% Durchschüsse $v_{25}$ unterhalb der $v_{50}$ und die Sicherheitsschwellen für 90% Durchschüsse $v_{90}$ oberhalb der $v_{50}$ liegt. Wie aussagekräftig diese Geschwindigkeiten sind hängt von der Art der Wechselwirkung zwischen Projektil und Schutz ab. Für ein und dieselbe Kombination können die Werte z.B. über die Zeit verglichen werden, für unterschiedliche Kombinationen ist ein Vergleich jedoch nicht immer zielführend.

*Beispiel 2:*

Berechnung der Grenzgeschwindigkeit $v_p$ für eine gegebene Durchschusswahrscheinlichkeit $p$.

geg.: $v_{50}$ = 465 m/s
$s_{korr}$ = 12,5 m/s

ges.: $v_{p,1\ von\ 1\ 000}$
$v_{p,1\ von\ 10\ 000}$

Die Formel $v_p = v_{50} + k_p \cdot s_{korr}$ liefert als Grenzgeschwindigkeit für die Durchschusswahrscheinlichkeit $p = 10^{-3}$ (1 Durchschuss auf 1 000 Schüsse):
(Wert -3,090 aus *Tabelle 1*)

$$v_{p,1\ von\ 1\ 000} = 465 - 3{,}090 \cdot 12{,}5 = 426{,}4\ m/s$$

Durchschusswahrscheinlichkeit $p = 10^{-4}$ (1 Durchschuss auf 10 000 Schüsse):
(Wert -3,719 aus *Tabelle 1*)

$$v_{p,1\ von\ 10\ 000} = 465 - 3{,}719 \cdot 12{,}5 = 418{,}5\ m/s$$

Man kann erkennen, dass eine niedrigere Durchschusswahrscheinlichkeit nur mit einer tieferen Grenzgeschwindigkeit zu erreichen ist.

*Beispiel 3:*

Berechnung der Durchschusswahrscheinlichkeit $p$ für eine gegebene Prüfgeschwindigkeit $v_p$= 420m/s

*geg.:* $v_{50}$= 465m/s ges.: $p_{v=420m/s}$

$s_{korr}$= 12,5m/s

Die Formel $k_p = \frac{v_p - v_{50}}{s_{korr}}$ liefert für die Prüfgeschwindigkeit 420 m/s:

$$k_p = \frac{420-465}{12{,}5} = -3{,}6$$

***Tabelle 2:*** *Durchschusswahrscheinlichkeit $p_v$ als Funktion von $k_p$*

| | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -5 | 2.87e-07 | 1.70e-07 | 9.98e-08 | 5.80e-08 | 3.34e-08 | 1.90e-08 | 1.07e-08 | 6.01e-09 | 3.33e-09 | 1.82e-09 |
| -4 | 3.17e-05 | 2.07e-05 | 1.34e-05 | 8.55e-06 | 5.42e-06 | 3.40e-06 | 2.11e-06 | 1.30e-06 | 7.94e-07 | 4.80e-07 |
| -3 | 1.35e-03 | 9.68e-04 | 6.87e-04 | 4.83e-04 | 3.37e-04 | 2.33e-04 | 1.59e-04 | 1.08e-04 | 7.24e-05 | 4.81e-05 |
| -2 | 2.28e-02 | 1.79e-02 | 1.39e-02 | 1.07e-02 | 8.20e-03 | 6.21e-03 | 4.66e-03 | 3.47e-03 | 2.56e-03 | 1.87e-03 |
| -1 | 1.59e-01 | 1.36e-01 | 1.15e-01 | 9.68e-02 | 8.08e-02 | 6.68e-02 | 5.48e-02 | 4.46e-02 | 3.59e-02 | 2.87e-02 |
| -0 | 5.00e-01 | 4.60e-01 | 4.21e-01 | 3.82e-01 | 3.45e-01 | 3.09e-01 | 2.74e-01 | 2.42e-01 | 2.12e-01 | 1.84e-01 |
| 0 | 5.00e-01 | 5.40e-01 | 5.79e-01 | 6.18e-01 | 6.55e-01 | 6.91e-01 | 7.26e-01 | 7.58e-01 | 7.88e-01 | 8.16e-01 |
| 1 | 8.41e-01 | 8.64e-01 | 8.85e-01 | 9.03e-01 | 9.19e-01 | 9.33e-01 | 9.45e-01 | 9.55e-01 | 9.64e-01 | 9.71e-01 |
| 2 | 9.77e-01 | 9.82e-01 | 9.86e-01 | 9.89e-01 | 9.92e-01 | 9.94e-01 | 9.95e-01 | 9.97e-01 | 9.97e-01 | 9.98e-01 |
| 3 | 9.99e-01 | 9.99e-01 | 9.99e-01 | 1.00e+00 | 1.00e+00 | 1.00e+00 | 1.00e+00 | 1.00e+00 | 1.00e+00 | 1.00e+00 |

Aus *Tabelle 2* ergibt sich für $k_p$= - 3,6 als Wert für die Durchschusswahrscheinlichkeit bei 420 m/s somit $p_v = 1{,}59 \cdot 10^{-4}$.

Es ist im Mittel mit ca. 1,6 Durchschüssen pro 10 000 Schüsse (also 16 Durchschüsse pro 100 000 Schüsse) zu rechnen.

Eine Berechnung mit der Formel

$$p_v = P(k_p) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{k_p} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx$$

führt zum gleichen Ergebnis und kann angewendet werden, wenn die Wahrscheinlichkeiten für nicht tabellierte $k_p$-Werte gefunden werden soll.

# Anlage 5: Erstellung eines Verteilungsfunktionsdiagramms ($p_v$ bzw. $F_k$ über $v$)

*Abbildung 3* zeigt die EXCEL-Funktion GAUSSFEHLER(), die auf Basis der Funktion

$$GAUSSFEHLER\ (x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\tau^2}\, d\tau$$

entsteht.

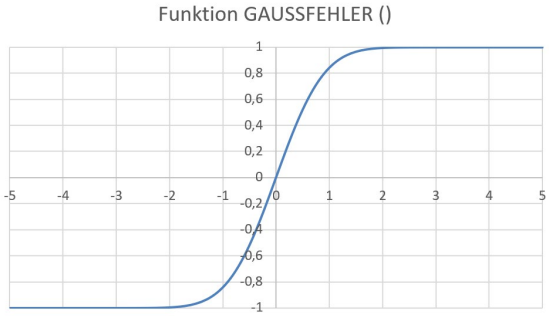


***Abbildung 3**: Diagramm der EXCEL-Funktion GAUSSFEHLER()*

Nach Ermittlung des ballistischen Grenzwerts $v_{50}$ (Erwartungswert) sowie der zugehörigen, korrigierten Standardabweichung $s_{korr}$ kann mit Hilfe dieser Funktion das Verteilungsfunktionsdiagramm (Verteilungsfunktion der Normalverteilung) erstellt werden.
Die Gauß'sche Fehlerfunktion hat eine Zielmenge von (-1,1), wo hingegen die Verteilungsfunktion der Normalverteilung zwingend Werte aus dem Bereich (0,1) annehmen muss, da diese Summenkurve die normierte Fläche unter der Normalverteilungsfunktion angibt.
Es wird also die Funktion in *Abbildung 3* um den $v_{50}$-Wert nach rechts und um 1 nach oben verschoben und der erhaltene y-Wert, der dann von 0 bis 2 geht, halbiert. Dies geschieht mit folgender Formel:

$$p_v = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + GAUSSFEHLER\left(\frac{\bar{v} - v_{50}}{\sqrt{2 \cdot s_{korr}^2}}\right)\right]$$

Um nun das Diagramm zu erhalten, werden die Werte $v_o$, $v_u$ und $F_k$ aus dem Formular (*Anlage 1*) übernommen und zeilenweise einerseits der Geschwindigkeitsmittelwert der einzelnen Klassen $\bar{v} = \frac{v_o - v_u}{2}$ ermittelt und andererseits die oben angeführte Funktion berechnet.
Um eine glattere Verteilungsfunktion zu erhalten, werden zusätzlich die Funktionswerte für viele, frei wählbare Geschwindigkeiten $\bar{v}$ errechnet.

Es ergibt sich beispielweise folgende *Tabelle 3* sowie *Tabelle 4:*

***Tabelle 3:*** *Beispiel zur Ermittlung der Durchschusswahrscheinlichkeit $p_v$ als Funktion von $\bar{v}$*

| $v_{50}$ | 473,2 | Klassengrenze: | 400m/s | |
|---|---|---|---|---|
| $s_{korr}$ | 2,9 | Klassenbreite: | 5m/s | |
| $v_u$ [m/s] | $v_o$ [m/s] | $\bar{v}$ [m/s] | $F_k$ | $p_v = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + GAUSFEHLER\left(\frac{\bar{v} - v_{50}}{\sqrt{2 \cdot s_{korr}^2}}\right)\right]$ |
| … | … | … | … | … |
| 440 | 445 | 442,5 | 0,00 | 0,0000000000E+00 |
| 445 | 450 | 447,5 | 0,00 | 0,0000000000E+00 |
| 450 | 455 | 452,5 | 0,00 | 3,3112401709E-13 |
| 455 | 460 | 457,5 | 0,00 | 2,5255722125E-08 |
| 460 | 465 | 462,5 | 0,00 | 1,0282265221E-04 |
| 465 | 470 | 467,5 | 0,00 | 2,4164915307E-02 |
| 470 | 475 | 472,5 | 0,36 | 4,0635368213E-01 |
| 475 | 480 | 477,5 | 1,00 | 9,3326880893E-01 |
| 480 | 485 | 482,5 | 1,00 | 9,9939837601E-01 |
| 485 | 490 | 487,5 | 1,00 | 9,9999967482E-01 |
| 490 | 495 | 492,5 | 1,00 | 9,9999999999E-01 |
| 495 | 500 | 497,5 | 1,00 | 1,0000000000E+00 |
| 500 | 505 | 502,5 | 1,00 | 1,0000000000E+00 |
| … | … | … | … | … |

***Tabelle 4:*** *Beispiel zur Ermittlung der Durchschusswahrscheinlichkeit $p_v$ als Funktion von $\bar{v}$*

| $\bar{v}$ [m/s] | $p_v = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + GAUSFEHLER\left(\frac{\bar{v} - v_{50}}{\sqrt{2 \cdot s_{korr}^2}}\right)\right]$ |
|---|---|
| 440 | 0,0000000000E+00 |
| 441 | 0,0000000000E+00 |
| 442 | 0,0000000000E+00 |
| 443 | 0,0000000000E+00 |
| 444 | 0,0000000000E+00 |
| 445 | 0,0000000000E+00 |
| 446 | 0,0000000000E+00 |
| 447 | 0,0000000000E+00 |
| 448 | 0,0000000000E+00 |
| 449 | 0,0000000000E+00 |
| 450 | 3,8857805862E-16 |
| 451 | 6,3837823916E-15 |
| … | … |

Somit kann nun das Verteilungsfunktionsdiagramm, beispielhaft zu sehen in *Abbildung 4*, erstellt werden.

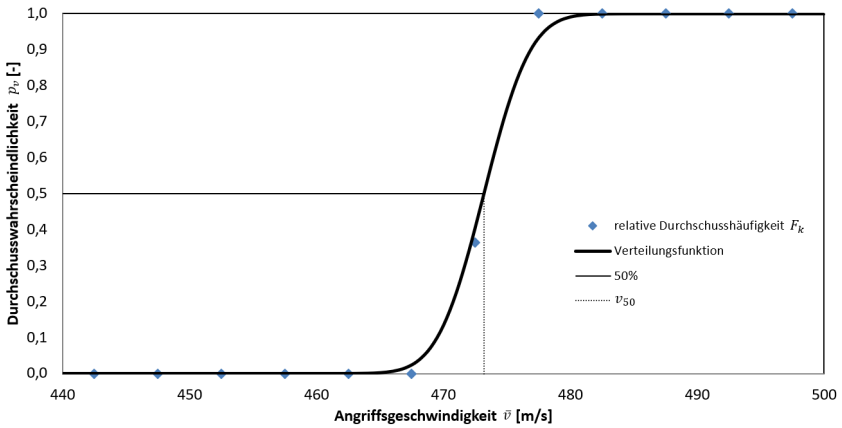


***Abbildung 4****: Beispiel eines Verteilungsfunktionsdiagramms $p_v$ bzw. $F_k$ über $\bar{v}$*

Wenn die ermittelten Daten einer Normalverteilung nur UNZUREICHEND entsprechen, ergibt sich ein Diagramm, ähnlich *Abbildung 5*.

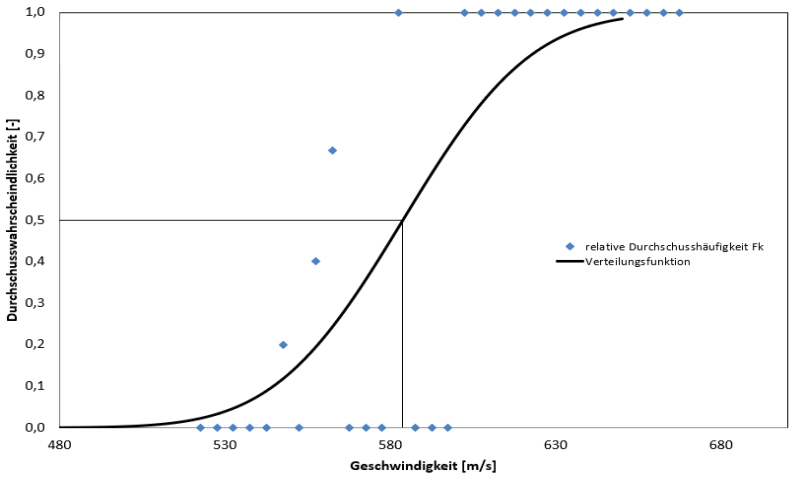


***Abbildung 5**: Beispiel eines Verteilungsfunktionsdiagramms $p_v$ bzw. $F_k$ über $\bar{v}$ bei unzureichender Normalverteilung der Messdaten.*

Für solche Messergebnisse kann keine korrekte Auswertung durchgeführt werden bzw. haben die ermittelten Auswerteergebnisse keinerlei Aussagekraft.

*Hingewiesen sei hier auf den «Shatter Gap» (näheres dazu ist der NATO AEP (Allied Engineering Publication) 2920 zu entnehmen), welcher das Ergebnis in Abbildung 5 erklären könnte. Dieser Effekt, der zu Ergebnissen führt, welche in Abbildung 6 dargestellt sind, kommt vorwiegend bei Kerngeschossen vor, wenn das Angriffsmedium (Geschosskern) eine ähnliche Härte hat wie die Probe und lässt sich ansatzweise wie folgt erklären: Der erste Anstieg in der Verteilungsfunktion kommt hier von der Geschosskernwirkung. Bei höheren Geschwindigkeiten interagiert der Geschosskern mit dem Zielmedium («zerbricht»), wodurch die Durchschusswahrscheinlichkeit wieder sinkt und bei noch höherer Geschossgeschwindigkeit wirkt die kinetische Energie des Geschosses penetrierend und die Durchschusswahrscheinlichkeit steigt wie bei einem kernlosen Geschoss.*

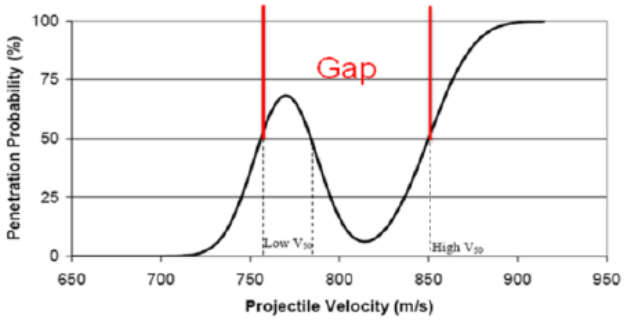


***Abbildung 6**: Beispiel eines Verteilungsfunktionsdiagramms mit «shatter gap» (aus NATO AEP 2920).*